

Giancarlo Buccella

Problemi di Geometria

per il biennio della Scuola Secondaria di Secondo Grado

(con il supporto della AI)

Indice

Premessa	3
1. Segmenti ed angoli	5
2. Uguaglianza dei triangoli	12
3. Rette parallele e perpendicolari	25
4. Uguaglianza dei triangoli rettangoli	52
5. Quadrilateri	63
6. Fascio di rette parallele	91
7. Luoghi geometrici	100
8. Circonferenza	114
9. Costruzioni geometriche	150
10. Poligoni regolari	192
11. Equivalenza dei poligoni	237
12. Rapporti e proporzioni fra grandezze	295
13. Aree dei poligoni	317
14. Similitudine fra figure piane	348
15. Applicazioni del teorema di Pitagora	417
16. Problemi di riepilogo sul teorema di Pitagora e sulla similitudine	576
17. Poligoni regolari	676
18. Circonferenza e cerchio	723
19. Rette e piani nello spazio	782
20. Diedri, triedri ed angoloidi	811
21. Poliedri e loro superfici	845
22. Volume dei poliedri	918
23. Poliedri simili	986
24. Cilindro circolare retto	1014
25. Cono circolare retto	1036
26. Sfera	1082
27. Solidi di rotazione	1132
28. Applicazioni dei teoremi di Guldino (o Pappo-Guldino)	1185
29. Trasformazioni del piano	1211
30. Problemi vari (per chi vuole di più...)	1322

Introduzione

Questo volume raccoglie oltre 1000 problemi di geometria interamente svolti, destinati agli studenti del biennio delle Scuole Secondarie.

La quasi totalità dei quesiti è tratta dal celebre manuale di E. M. Manziudo, *Geometria elementare*, edito da Laterza nel 1968. La scelta di questo testo pubblicato ormai diversi decenni fa potrebbe apparire singolare. Tuttavia, considerando che la struttura fondamentale della geometria euclidea è rimasta sostanzialmente immutata per oltre duemila anni, il valore didattico e la rigorosa impostazione concettuale di quelle pagine conservano ancora oggi una freschezza e una validità difficilmente intaccabili dal trascorrere del tempo.

La decisione utilizzare questo testo nasce da una motivazione fortemente affettiva. Si tratta infatti del mio testo scolastico di quanto frequentavo il biennio. Conservo ancora viva la memoria l'emozione e la gioia intellettuale trasmessa dalla mia professoressa, Lucia Britti, quando, nel suo camice azzurro, si avvicinava alla lavagna con il gessetto in mano per guidarci alla scoperta della geometria euclidea. Sul manuale originale, che custodisco con cura, figurano ancora le piccole stelle a matita con cui contrassegnavo i problemi assegnati per casa.

La geometria euclidea occupa infatti un posto del tutto particolare nella storia del pensiero umano. È forse una delle più antiche forme di conoscenza scientifica organizzata e, certamente, uno dei primi esempi di una disciplina costruita secondo un rigoroso sistema logico-deduttivo. Già nell'antichità l'uomo si era trovato di fronte alla necessità di misurare le distanze, le superfici e i volumi, di dividere i terreni e di costruire edifici; ma con la geometria greca, e soprattutto con l'opera di Euclide (vissuto intorno al 300 a.C.), queste conoscenze pratiche vennero progressivamente trasformate in un edificio teorico fondato su definizioni, postulati, assiomi e teoremi.

Il genio di Euclide non è stato tanto quello creativo, che pure c'è stato, ma quello di aver compiuto una straordinaria opera di sistematizzazione e riorganizzazione delle conoscenze matematiche accumulate nei secoli precedenti. Infatti egli attinse a un ricco patrimonio di conoscenze, proveniente da diverse tradizioni.

La geometria egiziana: La geometria nacque in Egitto per scopi pratici come l'agrimensura, e le sue regole venivano tramandate come "ricette" fisse. Alcuni studiosi ritengono che l'impostazione stessa dei problemi negli *Elementi* risenta di questa antica tradizione egiziana.

I matematici greci precedenti: Fu il "genio libero" dei Greci a trasformare queste conoscenze pratiche in una scienza dimostrativa. Prima di Euclide, fiorirono scuole e pensatori come:

Talete e Pitagora: figure fondamentali per lo sviluppo della matematica greca delle origini.

Ippocrate di Chio: autore di uno dei primi *Elementi* e famoso per i suoi studi sulle "lunule" (figure a forma di mezzaluna), un tentativo di risolvere il problema della quadratura del cerchio.

Archita: importante matematico e contemporaneo di Platone

La grandezza della geometria euclidea risiede proprio in questa sua struttura. Partendo da pochi concetti fondamentali e da alcune proposizioni assunte come vere, essa procede attraverso il ragionamento per costruire risultati sempre più complessi. Ogni affermazione trova la propria giustificazione in quelle precedenti, secondo una concatenazione logica.. È questo impianto deduttivo a conferire alla geometria una particolare solidità e, nello stesso tempo, una sorprendente capacità di resistere al trascorrere dei secoli.

Cambiano le tecnologie, cambiano gli strumenti di calcolo, cambiano i linguaggi e le conoscenze scientifiche, ma un teorema di geometria euclidea continua a essere vero oggi esattamente come lo era nell'antichità, naturalmente all'interno delle ipotesi sulle quali è fondato.

Il teorema di Pitagora, le proprietà dei triangoli, delle circonferenze, delle rette parallele e delle figure piane appartengono a una tradizione matematica che attraversa più di due millenni. Poche altre costruzioni del pensiero umano possono vantare una continuità altrettanto straordinaria.

Ma la geometria non è soltanto un insieme di proprietà da imparare e di formule da applicare.

Il suo valore più profondo risiede nell'educazione al ragionamento.

Di fronte a un problema geometrico non basta riconoscere una figura o ricordare una formula: occorre osservare, individuare i dati, stabilire quali relazioni li collegano, formulare un'ipotesi, scegliere un percorso logico e infine dimostrare che quel percorso conduce necessariamente alla soluzione. In questo senso, la geometria costituisce una vera palestra del pensiero razionale.

A distanza di tanti anni, ritornare su quelle pagine significa quindi ritrovare non soltanto una serie di esercizi, ma anche una parte importante della propria formazione. Significa riscoprire il fascino di una disciplina nella quale, attraverso pochi elementi apparentemente semplici — un punto, una retta, un angolo, un triangolo, una circonferenza — è possibile costruire un universo teorico sorprendentemente ricco e coerente.

È proprio questa combinazione di semplicità degli elementi di partenza e profondità delle conclusioni a rendere la geometria euclidea ancora oggi così affascinante. Una figura disegnata sulla carta può sembrare immediatamente comprensibile, ma dietro quella figura si nasconde una rete di relazioni che soltanto il ragionamento permette di portare alla luce. E quando, alla fine di una dimostrazione,

ciò che inizialmente appariva oscuro diventa inevitabile, si sperimenta quella particolare soddisfazione intellettuale che è una delle ragioni più profonde per cui vale la pena studiare matematica.

Con la pubblicazione di questi svolgimenti si intende quindi offrire uno strumento di lavoro chiaro e sistematico, capace di guidare passo dopo passo il ragionamento logico-deduttivo. Gli esercizi sono presentati non come semplici applicazioni di formule, ma come occasioni per imparare a leggere una figura, riconoscere le relazioni geometriche e costruire con ordine il percorso che conduce alla soluzione.

L'auspicio è che questa raccolta possa accompagnare gli studenti nel superamento delle difficoltà quotidiane dello studio, aiutandoli nello stesso tempo ad apprezzare la lineare bellezza della geometria euclidea: una bellezza antica, nata più di duemila anni fa, ma ancora capace di affascinare il pensiero dell'uomo contemporaneo con la forza e la chiarezza della logica.

Ho aggiunto, per completezza, un ultimo capitolo relativo alle trasformazioni del piano che è un argomento inserito nei programmi scolastici a partire dal 1980, come argomento facoltativo per poi diventare obbligatorio nel 2010.

Nota storica.

La cosiddetta geometria delle trasformazioni è relativamente recente. Per secoli fare geometria ha significato studiarla secondo quanto prescrive Euclide nei suoi Elementi, scritti attorno al 300 a.C. Euclide considera sì il concetto di movimento da un punto di vista intuitivo e meccanico, ma non lo descrive, non dice cioè come possa avvenire, né lo considera come una “trasformazione”. Solo nel XIX secolo la geometria si avvia a trattare le trasformazioni geometriche, da un punto di vista algebrico, quindi come applicazioni da insiemi di punti a insiemi di punti. La vera e propria consacrazione si ha nel cosiddetto programma di Erlangen, ossia nella prolusione che il famoso matematico tedesco Felix Klein presentò all'Università di Erlangen come “presentazione” dei suoi studi, quando fu lì nominato professore.

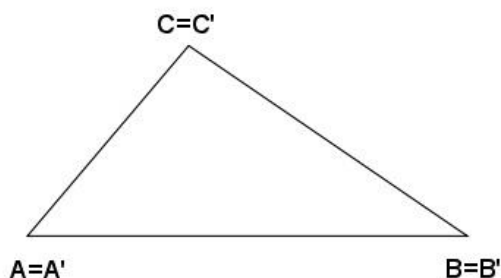
Klein suggeriva appunto di studiare la geometria come una corrispondenza fra insiemi di punti; lo studio doveva poi fissarsi sui cosiddetti “invarianti”, cioè su quegli enti che non cambiavano durante la trasformazione, come appunto la misura di segmenti o angoli, la direzione di rette e altre proprietà

È importante notare che il testo degli *Elementi* che leggiamo oggi non è esattamente quello uscito dalla penna di Euclide. Nel corso dei secoli, il suo lavoro fu copiato innumerevoli volte e subì inevitabili alterazioni e aggiunte. Un intervento particolarmente significativo fu quello di Teone di Alessandria (IV secolo d.C.), che revisionò il testo per scopi didattici, e per molto tempo la sua versione fu quella più diffusa. Solo in epoca moderna, con il lavoro filologico di studiosi come J.L. Heiberg (che nel 1880 ricostruì il testo basandosi sui manoscritti più antichi e affidabili, come il Codice Vaticano Gr. 190), siamo riusciti a risalire a una versione molto più vicina all'originale di Euclide

Premessa

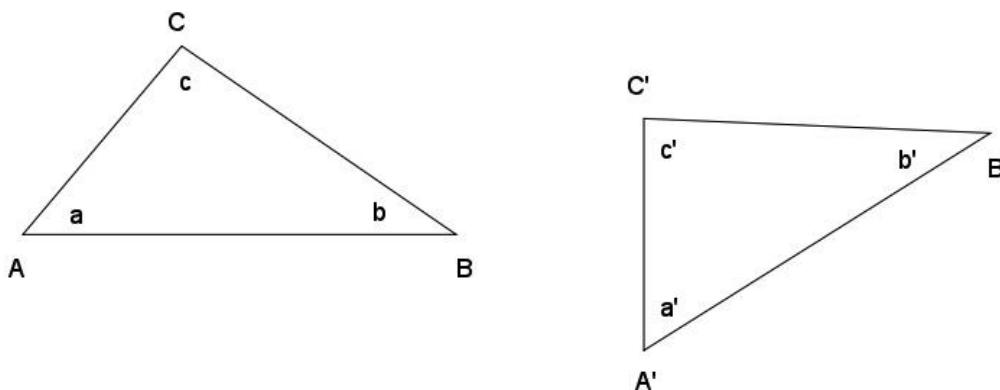
In questa raccolta di problemi di geometria, per semplicità ed immediatezza di comprensione, il termine “uguaglianza” verrà spesso usato come sinonimo del termine “congruenza”, sebbene fra di loro ci sia una lieve differenza di significato che però agli effetti “pratici” è del tutto irrilevante.

Uguaglianza: In matematica l’uguaglianza è una cosiddetta nozione *primitiva*, ovvero una nozione che non viene definita; è sostanzialmente un simbolo che si usa all’interno di certe formule dal significato non ulteriormente specificato. Dal punto di vista della teoria degli insiemi, due insiemi sono uguali se contengono esattamente gli stessi elementi. Ne segue che due figure geometriche (triangoli, segmenti, poliedri, ecc...) sono uguali se sono esattamente la stessa figura (ovvero se sono lo stesso insieme di punti). Ad esempio nella figura di sotto è riportato il caso di due triangoli uguali.



I due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono uguali, essendo $A=A'$, $B=B'$ e $C=C'$.

Congruenza: La congruenza è invece una relazione un po' più debole dell’uguaglianza: due figure geometriche sono congruenti se esiste un movimento rigido che porta una figura nell'altra. In altre parole a meno di un movimento rigido (traslazione o rotazione per esempio, o combinazione delle due) le due figure sono uguali. Congruente è sinonimo di *isometrico*: le isometrie di uno spazio geometrico sono le trasformazioni dello spazio in sé che *conservano le distanze*. Ovviamente se due figure geometriche sono uguali, allora in particolare sono congruenti. La figura di sotto mostra due triangoli congruenti (o isometrici), ma non uguali.



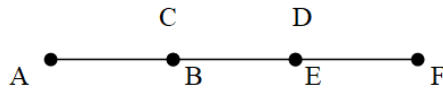
I due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono congruenti: la lunghezza del segmento AB coincide con la lunghezza del segmento $A'B'$, la lunghezza del segmento AC coincide con la lunghezza del segmento $A'C'$ e la lunghezza del segmento BC coincide con la lunghezza del segmento $B'C'$; inoltre l'ampiezza dell'angolo a coincide con l'ampiezza dell'angolo a' , l'ampiezza dell'angolo b coincide con l'ampiezza dell'angolo b' e l'ampiezza dell'angolo c coincide con l'ampiezza dell'angolo c' .

Dire che due figure A, B sono uguali vuol dire che esse hanno esattamente gli stessi punti (insomma si sta usando nomi diversi per denotare lo stesso oggetto); invece dire che A, B sono congruenti significa che esiste un movimento rigido che porta B a coincidere con A .

1 Segmenti ed angoli

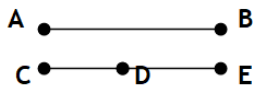
1.1 Dati tre segmenti AB, BC, EF, costruire la loro somma.

Basta allinearli su di una retta.



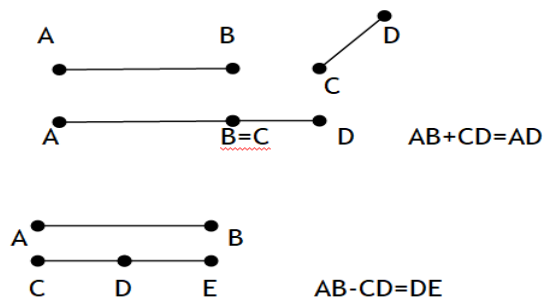
$$AB + BC + EF = AF$$

1.2 Dati due segmenti AB e CD, diseguali, costruire la loro differenza.



La differenza fra due segmenti è data dal segmento che aggiunto al minore uguaglia il maggiore, perciò nel nostro caso $AB - CD = DE$.

1.3 Dati due segmenti AB e CD diseguali, costruire la loro somma, poi la loro differenza e verificare che la somma dei due nuovi segmenti così ottenuti è il doppio del maggiore dei due segmenti dati.



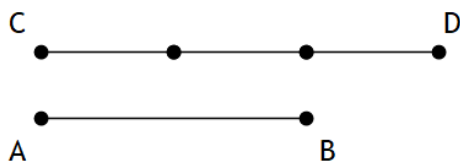
Sommando AD con DE abbiamo $AD + DE = AB + CD + AB - CD = 2 AB$.

1.4 Dati due segmenti AB e CD diseguali, costruire la loro somma e la loro differenza, e verificare che la differenza dei due segmenti così ottenuti è il doppio del minore dei due segmenti dati.

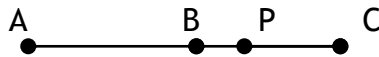
Riferendoci al problema precedente abbiamo $AD - DE = AB + CD - AB + CD = 2 CD$

1.5 Disegnare un segmento AB che sia $\frac{2}{3}$ di un dato segmento CD.

Si divide CD in 3 parti uguali e si prende il segmento lungo 2.



1.6 Dati due segmenti uguali ed adiacenti AB e BC, se P è un punto interno a BC, far vedere che si ha $BP = (AP - PC)/2$



Si ha $2BP = AP - PC = AB + BP - PC$ portando ora BP al primo membro si ha

$BP = AB - PC$ ossia $AB = BP + PC$ o anche (essendo $AB = BC$)

$BC = BP + PC$

che esprime proprio la somma di due segmenti, quindi la relazione data è certamente vera perché si riconduce alla verifica della somma fra due segmenti.

1.7 Due angoli sono supplementari ed uno è quadruplo dell'altro. Quale frazione di angolo piatto è ciascuno?

Si ha $\alpha + \beta = 180^\circ$ e deve essere $\alpha = 4\beta$ e sostituendo questo valore nella prima relazione si ha

$5\beta = 180^\circ$ cioè

$\beta = 36^\circ$ ed $\alpha = 4 \cdot 36 = 144^\circ$

percentualmente si ha

$$\beta/180^\circ = 36/180 = 0.2 = 20\%$$

$$\alpha/180^\circ = 144/180 = 0.8 = 80\%$$

era ovvio che alfa doveva essere l'80% di 180° in quanto la somma con beta è proprio 180!

1.8 Due angoli sono complementari ed uno è 2/3 dell'altro, quale frazione di angolo retto è ciascuno?

Deve essere $\alpha + \beta = 90^\circ$

ed anche $\alpha = (2/3) \beta$

sostituendo questo valore nella relazione precedente si ha

$$(2/3) \beta + \beta = 90^\circ \text{ ossia } 5/3 \beta = 90^\circ \text{ e quindi risulta } \beta = (3/5) 90^\circ = 54^\circ \text{ ed } \alpha = 36^\circ$$

percentualmente si ha

$$\beta/90^\circ = 54/90 = 0.6 = 60\%$$

$$\alpha/90^\circ = 36/90 = 0.4 = 40\%.$$

1.9 Due angoli sono complementari ed uno è i 1/6 di un angolo piatto. Quale frazione di angolo retto è l'altro?

Deve essere $\alpha + \beta = 90^\circ$ ed anche $\alpha = (1/6) 180^\circ = 30^\circ$ e dovrà essere dunque $\beta = 60^\circ$ la sua frazione percentuale rispetto ad un angolo retto è

$$\beta/90^\circ = 60/90 = 0.67 = 67\%.$$

1.10 Un angolo supera il suo adiacente di 2/3 di un angolo retto. Quali sono le ampiezze dei due angoli?

Deve essere $\alpha + \beta = 180^\circ$ ed anche $\alpha = \beta + \frac{2}{3} 90^\circ = \beta + 60^\circ$ sostituendo si ha

$$\beta + 60^\circ + \beta = 180^\circ \quad 2\beta = 120^\circ \text{ e quindi } \beta = 60^\circ \text{ ed allora alfa sarà } \alpha = 120^\circ.$$

1.11 La somma di due angoli è $\frac{4}{5}$ di un angolo piatto, ed uno è doppio dell'altro, Quale frazione di angolo retto è ciascuno?

Deve essere $\alpha + \beta = (\frac{4}{5}) 180^\circ = 144^\circ$ ed anche $\alpha = 2\beta$, sostituendo si ha $2\beta + \beta = 144^\circ$
 $3\beta = 144^\circ$
 $\beta = 48^\circ$ e $\alpha = 96^\circ$.

1.12 Stabilire che le bisettrici di due angoli opposti al vertice sono in linea retta.

Gli angoli opposti al vertice sono formati dalle stesse due rette, quindi:

se una retta è r e l'altra è s gli angoli opposti al vertice sono:

uno formato da r e s

l'altro formato da r e s ma "dall'altra parte".

La bisettrice di un angolo è la semiretta che:

divide l'angolo in due parti congruenti

è equidistante dai due lati dell'angolo

Ora, negli angoli opposti al vertice: i lati sono le stesse due rette, quindi i punti equidistanti da r e s sono gli stessi

Il luogo dei punti equidistanti da due rette è una retta: la retta che forma 45° con entrambe (nel caso di rette perpendicolari) o comunque la retta che "sta in mezzo" alle due.

Questa retta passa: da un lato come bisettrice del primo angolo, dall'altro lato come bisettrice dell'angolo opposto.

Quindi le due bisettrici sono la stessa retta, solo con verso opposto.

Dunque le bisettrici di due angoli opposti al vertice sono collineari, cioè formano un'unica linea retta.

1.13 Stabilire che l'angolo avente per lati le bisettrici di due angoli consecutivi è uguale alla loro semisomma.

Infatti detti α e β i due angoli consecutivi, si ha che la prima bisettrice divide l'angolo α in due parti uguali idem per la seconda, dunque avremo che l'angolo formato dalle due bisettrici vale $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ che è appunto la semisomma degli angoli dati.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo AHO per determinare la misura dell'ipotenusa, che corrisponde al raggio r della circonferenza:

$$r = \sqrt{AH^2 + OH^2}$$

Sostituiamo i valori numerici che conosciamo all'interno dell'equazione:

$$r = \sqrt{6^2 + 2,5^2}$$

$$r = 6,5 \text{ cm}$$

Ora che conosciamo la misura del raggio, calcoliamo l'area S del cerchio applicando la formula classica:

$$S = \pi \cdot r^2$$

Sostituiamo il valore numerico di $r^2 = 42,25$:

$$S = 42,25\pi \text{ cm}^2$$

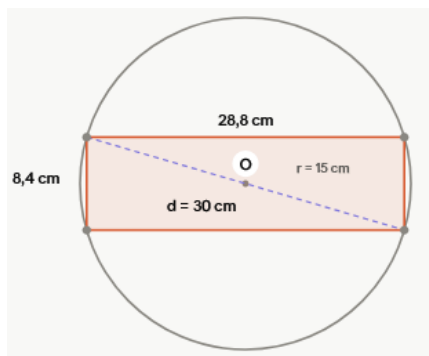
Calcoliamo infine la lunghezza C della circonferenza:

$$C = 2 \pi r$$

Sostituiamo la misura del raggio che abbiamo ricavato:

$$C = 2 \pi 6,5 = 13\pi \text{ cm}$$

18.14 In un cerchio è iscritto un rettangolo avente l'area di $241,92 \text{ cm}^2$. Sapendo che una dimensione è $\frac{7}{24}$ dell'altra, calcolare il perimetro del rettangolo, l'area del cerchio ed il perimetro dell'esagono regolare inscritto. [R. $74,4 \text{ cm}$; $\text{cm}^2 225\pi \text{ cm}^2$; 90 cm].



Impostiamo il problema definendo le due dimensioni del rettangolo come multipli di un fattore comune, sfruttando il rapporto $\frac{7}{24}$.

Dati: area del rettangolo $= 241,92 \text{ cm}^2$, una dimensione $= \frac{7}{24}$ dell'altra.

Chiamiamo le due dimensioni $7k$ e $24k$ (così il loro rapporto è esattamente $\frac{7}{24}$).

$$\text{Area} = 7k \cdot 24k = 168k^2$$

$$168k^2 = 241,92 \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{241,92}{168} = 1,44 \quad \Rightarrow \quad k = 1,2$$

$$b = 24k = 24 \times 1,2 = 28,8cm \quad h = 7k = 7 \times 1,2 = 8,4cm$$

Perimetro del rettangolo

$$2p = 2(b + h) = 2(28,8 + 8,4) = 2 \times 37,2 = 74,4cm$$

5. Troviamo il diametro del cerchio (la diagonale del rettangolo)

Poiché il rettangolo è inscritto nel cerchio, la sua diagonale coincide con il diametro. Riconosciamo il rapporto 7-24: è la terna pitagorica 7-24-25! Quindi:

$$d = 25k = 25 \times 1,2 = 30 \text{ cm}$$

$$r = \frac{d}{2} = 15cm$$

$$A_{cerchio} = \pi r^2 = 225\pi \text{ cm}^2$$

Perimetro dell'esagono regolare inscritto

Il lato dell'esagono regolare inscritto è uguale al raggio della circonferenza:

$$l_{esagono} = r = 15cm$$

$$2p_{esagono} = 6 \times 15 = 90cm$$

Risultati

$$2p_{rett} = 74,4 \text{ cm}$$

$$A_{cerchio} = 225\pi \text{ cm}^2$$

$$2p_{esagono} = 90 \text{ cm}$$

18.15 Calcolare l'area del cerchio iscritto in un triangolo isoscele avente il perimetro di 64 cm e l'altezza uguale ai $\frac{12}{7}$ della base. [R. 86,546250 cm²].

Consideriamo un triangolo isoscele ABC con base $b = AC$ e lati obliqui $AB = BC = l$. Indichiamo con $h = BK$ l'altezza del triangolo relativa alla base, dove K rappresenta il punto medio di AC .

Sappiamo che il perimetro misura:

$$2p = 64cm$$

L'altezza del triangolo è pari ai $\frac{12}{7}$ della base, per cui possiamo scrivere la relazione:

$$h = \frac{12}{7}b$$

Per impostare un'equazione lineare estremamente semplice, definiamo la misura della base b in funzione di un fattore di scala incognito x . Poniamo:

$$b = 14x$$

In questo modo, la misura della semibase è:

$$KC = \frac{b}{2} = 7x$$

Calcoliamo l'altezza h in funzione di x :

$$h = \frac{12}{7} \cdot (14x) = 24x$$

L'altezza BK divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli congruenti. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BKC per ricavare la lunghezza del lato obliquo l :

$$l = \sqrt{KC^2 + h^2}$$

Sostituiamo i valori espressi in funzione di x :

$$l = \sqrt{(7x)^2 + (24x)^2} = \sqrt{49x^2 + 576x^2} = 25x$$

Esprimiamo ora il perimetro totale del triangolo in funzione del parametro x :

$$2p = b + 2 \cdot l = 14x + 2 \cdot (25x) = 14x + 50x = 64x$$

Uguagliamo l'espressione ottenuta al valore numerico del perimetro fornito dal problema:

$$64x = 64 \Rightarrow x = 1cm$$

Otteniamo così le misure effettive delle dimensioni del triangolo isoscele:

$$b = 14cm$$

$$h = 24cm$$

$$l = 25cm$$

Calcoliamo il semiperimetro p e l'area S del triangolo:

$$p = \frac{64}{2} = 32 \text{ cm}$$

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{14 \cdot 24}{2} = 7 \cdot 24 = 168 \text{ cm}^2$$

Determiniamo il raggio r del cerchio inscritto applicando la formula inversa dell'area:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{168}{32} = \frac{21}{4} = 5,25 \text{ cm}$$

Calcoliamo ora l'area A del cerchio inscritto tramite la formula classica:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (5,25)^2 = 27,5625\pi \text{ cm}^2$$

$$A = 86,54625 \text{ cm}^2$$

18.16 Calcolare il raggio del cerchio iscritto e di quello circoscritto ad un triangolo rettangolo sapendo che un cateto misura 6,3 cm e che la differenza fra l'ipotenusa e l'altro cateto è 2,1 cm. [R. 2,1 cm; 5,25 cm].

Consideriamo un triangolo rettangolo nel quale la misura del primo cateto è:

$$c_1 = 6,3 \text{ cm}$$

Indichiamo con c_2 l'altro cateto e con i la lunghezza dell'ipotenusa. Sappiamo che la differenza tra l'ipotenusa e il secondo cateto è pari a 2,1 cm, per cui possiamo scrivere la relazione:

$$i - c_2 = 2,1 \text{ cm} \Rightarrow i = c_2 + 2,1 \text{ cm}$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo per ricavare la lunghezza del cateto incognito:

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Sostituiamo le espressioni in nostro possesso all'interno dell'equazione:

$$(c_2 + 2,1)^2 = 6,3^2 + c_2^2$$

Sviluppiamo il quadrato di binomio al primo membro:

$$c_2^2 + 4,2 \cdot c_2 + 4,41 = 39,69 + c_2^2$$

$$c_2 = 8,4 \text{ cm}$$

Ora determiniamo la misura dell'ipotenusa i sommando i valori:

$$i = 8,4 + 2,1 = 10,5 \text{ cm}$$

Calcoliamo il raggio r del cerchio inscritto applicando la nota relazione per i triangoli rettangoli :

$$r = \frac{c_1 + c_2 - i}{2}$$

Sostituiamo i valori numerici che abbiamo determinato:

$$r = \frac{6,3 + 8,4 - 10,5}{2} = \frac{14,7 - 10,5}{2} = \frac{4,2}{2} = 2,1 \text{ cm}$$

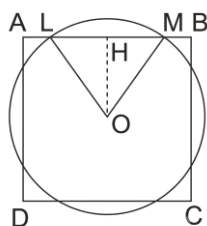
Calcoliamo infine il raggio R del cerchio circoscritto. Ricordiamo che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo coincide con il diametro della circonferenza circoscritta, per cui dividiamo a metà l'ipotenusa per trovare il raggio circoscritto:

$$R = \frac{i}{2}$$

Sostituiamo il valore numerico dell'ipotenusa:

$$R = \frac{10,5}{2} = 5,25 \text{ cm}$$

18.17 Un quadrato ha il lato lungo 48 cm. Qual'è la lunghezza della circonferenza avente per centro quello del quadrato e che intercetta sui lati di questo delle corde uguali ai $\frac{7}{24}$ del suo lato? [R. 157 cm].



$$L = 48 \text{ cm}$$

Indichiamo con O il centro del quadrato. Tracciamo una circonferenza concentrica, ovvero avente per centro lo stesso punto O , con raggio incognito R . Questa circonferenza interseca i lati del quadrato, intercettando su ciascuno di essi una corda la cui lunghezza è pari ai $\frac{7}{24}$ del lato del quadrato stesso

Calcoliamo la lunghezza della corda c

$$c = LM = \frac{7}{24} \cdot L = \frac{7}{24} \cdot 48 = 14 \text{ cm}$$

Consideriamo ora uno dei lati del quadrato, ad esempio il lato AB . Considerando la geometria della figura è evidente che la distanza della retta contenente il lato AB dal centro O è pari a metà del lato del quadrato. Se indichiamo con H il punto medio della corda intercettata su AB , il segmento perpendicolare OH rappresenta questa distanza, la cui misura è

$$OH = \frac{L}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}$$

Poiché il punto H è il punto medio della corda, calcoliamo la lunghezza della semicorda HM ,

$$HM = \frac{c}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

Collegiamo il centro O con il punto P per ottenere il raggio della circonferenza

$$OM = R$$

Osserviamo che il triangolo OHM è rettangolo nel vertice H , in quanto il segmento OH è perpendicolare al lato AB . Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHM per determinare la lunghezza dell'ipotenusa, che corrisponde al raggio R della circonferenza

$$R = \sqrt{OH^2 + HP^2}$$

Sostituiamo i valori numerici che abbiamo ricavato

$$R = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{576 + 49} = 25 \text{ cm}$$

Calcoliamo infine la lunghezza della circonferenza C moltiplicando il diametro per π greco

$$C = 2 \pi R = 2 \pi 25 = 50\pi \text{ cm} = 157 \text{ cm}$$

18.18 Un triangolo isoscele ha il lato obliquo lungo $13a$. Il punto P di contatto di questo lato con la circonferenza iscritta nel triangolo, lo divide in due segmenti di cui quello avente un estremo nel vertice del triangolo è $\frac{8}{5}$ dell'altro. Calcolare il raggio e l'area del cerchio iscritto. $[R. \frac{10}{3}a; \frac{100}{9}\pi a^2]$.

Consideriamo un triangolo isoscele ABC con base AC e lati obliqui:

$$AB = BC = 13a$$

Indichiamo con P il punto di contatto della circonferenza iscritta con il lato obliquo BC . Questo punto divide il lato obliquo BC nei due segmenti BP (con un estremo nel vertice superiore B) e PC (con un estremo sul vertice alla base C).

Sappiamo che il segmento BP è pari a $\frac{8}{5}$ del segmento PC , per cui possiamo scrivere la relazione:

$$BP = \frac{8}{5}PC$$

Poiché l'intera lunghezza del lato obliquo è la somma dei due segmenti, abbiamo:

$$BC = BP + PC \Rightarrow 13a = \frac{8}{5}PC + PC \Rightarrow 13a = \frac{13}{5}PC$$

$$PC = 5a$$

Determiniamo ora la lunghezza del segmento BP :

$$BP = 13a - 5a = 8a$$

Applichiamo la proprietà geometrica dei segmenti di tangente condotti da un punto esterno a una circonferenza, per cui i segmenti di contatto sono uguali. Se indichiamo con K il punto medio della base AC (che corrisponde anche al punto di contatto del cerchio con la base), otteniamo:

$$CK = CP = 5a$$

Poiché il punto K divide a metà la base AC del triangolo isoscele, calcoliamo la lunghezza totale della base AC :

$$AC = 2 \cdot CK = 2 \cdot 5a = 10a$$

Per calcolare l'altezza $h = BK$ del triangolo, applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BKC :

$$h = \sqrt{BC^2 - CK^2}$$

Sostituiamo i valori numerici che abbiamo determinato:

$$h = \sqrt{(13a)^2 - (5a)^2} = \sqrt{169a^2 - 25a^2} = 12a$$

Indichiamo ora con O il centro del cerchio inscritto di raggio $r = OP$. Il centro O si trova lungo l'altezza BK e il raggio OP è perpendicolare alla tangente BC nel punto di contatto P , per cui il triangolo OPB è rettangolo nel vertice P .

Confrontiamo il triangolo rettangolo OPB (rettangolo in P) con il triangolo rettangolo BKC (rettangolo in K). Poiché entrambi i triangoli condividono l'angolo acuto in B , essi risultano simili per il primo criterio di similitudine:

$$\Delta OPB \sim \Delta BKC$$

Dalla similitudine ricaviamo la proporzione tra i lati corrispondenti:

$$\frac{OP}{CK} = \frac{BP}{BK}$$

Sostituiamo in questa relazione le misure in nostro possesso per determinare il raggio $r = OP$:

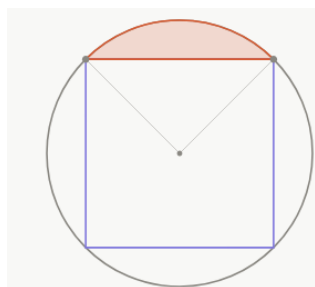
$$\frac{r}{5a} = \frac{8a}{12a} \Rightarrow \frac{r}{5a} = \frac{2}{3} \Rightarrow r = \frac{2}{3} \cdot 5a = \frac{10}{3}a$$

Ora calcoliamo l'area A del cerchio inscritto applicando la formula classica:

$$A = \pi r^2$$

$$A = \pi \left(\frac{10}{3}a \right)^2 = \frac{100}{9} \pi a^2$$

18.19 Calcolare l'area del segmento circolare limitato da una circonferenza di raggio r e dal lato del quadrato inscritto. [R. $\frac{r^2}{4}(\pi - 2)$].



Consideriamo una circonferenza di raggio r . Vogliamo calcolare l'area del segmento circolare delimitato dal lato del quadrato inscritto.

Per risolvere il problema in modo semplice e rapido, analizziamo la figura geometrica complessiva:

l'area totale del cerchio si ottiene con la formula classica:

$$S_{cerchio} = \pi r^2$$

il lato l_4 di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio r è pari a:

$$l_4 = r\sqrt{2}$$

l'area del quadrato inscritto si ottiene elevando il lato al quadrato:

$$S_{quadrato} = l_4^2 = (r\sqrt{2})^2 = 2r^2$$

un quadrato inscritto divide il cerchio in quattro segmenti circolari congruenti, ciascuno dei quali è limitato da un lato del quadrato e dal rispettivo arco di circonferenza.

Calcoliamo l'area S_{seg} di uno solo di questi segmenti circolari sottraendo l'area del quadrato da quella del cerchio e dividendo il risultato per 4:

$$S_{seg} = \frac{S_{cerchio} - S_{quadrato}}{4}$$

Sostituiamo le espressioni delle aree che abbiamo determinato:

$$S_{seg} = \frac{\pi r^2 - 2r^2}{4}$$

Raccogliamo a fattor comune il termine $\frac{r^2}{4}$ per giungere alla forma desiderata:

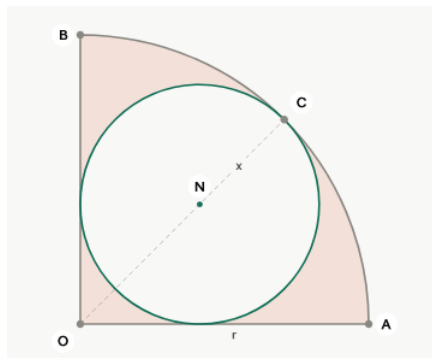
$$S_{seg} = \frac{r^2}{4}(\pi - 2)$$

18.20 Calcolare il raggio di un cerchio inscritto in un quadrante di cerchio di raggio r e l'area della superficie esterna al cerchio e limitata dal quadrante.

(Si ha: $ON = OC + CN$,

perciò indicando con x il raggio del cerchio inscritto, si ha: $r = x\sqrt{2} + x, \dots$).

$[R. r(\sqrt{2} - 1); \frac{\pi r^2}{4}(8\sqrt{2} - 11)]$.



Consideriamo un quadrante di cerchio di raggio r con centro nel punto O . All'interno di questo quadrante è inscritto un cerchio di centro C e raggio pari a x .

Il centro C del cerchio inscritto si trova sulla bisettrice dell'angolo retto del quadrante. Proiettando C perpendicolarmente su una delle due semirette che delimitano il quadrante, otteniamo un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti misurano x e la cui ipotenusa è la distanza OC . Applichiamo il teorema di Pitagora per trovare la lunghezza di OC :

$$OC = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$$

Sia N il punto di tangenza tra il cerchio inscritto e l'arco esterno del quadrante. Poiché i punti O , C e N sono allineati sulla bisettrice, la misura del raggio del quadrante $ON = r$ è data dalla somma dei segmenti:

$$ON = OC + CN$$

Sostituiamo le lunghezze dei singoli segmenti per ottenere la relazione geometrica:

$$r = x\sqrt{2} + x$$

Questo risultato corrisponde esattamente al suggerimento fornito dal testo. Raccogliamo a fattor comune il raggio x :

$$r = x(\sqrt{2} + 1)$$

Isoliamo l'incognita x dividendo entrambi i membri per il binomio:

$$x = \frac{r}{\sqrt{2} + 1}$$

Razionalizziamo la frazione moltiplicando numeratore e denominatore per la differenza delle basi:

$$x = \frac{r \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \frac{r(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = r(\sqrt{2} - 1)$$

Troviamo così il raggio del cerchio inscritto espresso in funzione del raggio del quadrante.

Procediamo ora con il calcolo dell'area della superficie esterna al cerchio e limitata dal quadrante.

Questa superficie corrisponde alla differenza tra l'area del quadrante e l'area del cerchio inscritto.

Calcoliamo l'area S_{quad} del quadrante di raggio r :

$$S_{quad} = \frac{\pi r^2}{4}$$

Calcoliamo l'area S_{cer} della circonferenza di raggio x :

$$S_{cer} = \pi x^2 = \pi [r(\sqrt{2} - 1)]^2$$

$$S_{cer} = \pi r^2 (2 - 2\sqrt{2} + 1) = \pi r^2 (3 - 2\sqrt{2})$$

Determiniamo l'area della superficie richiesta eseguendo la sottrazione tra le due aree:

$$S_{est} = S_{quad} - S_{cer}$$

Sostituiamo le due espressioni:

$$S_{est} = \frac{\pi r^2}{4} - \pi r^2 (3 - 2\sqrt{2})$$

Raccogliamo a fattor comune il termine $\frac{\pi r^2}{4}$ e semplifichiamo i termini nella parentesi quadrata:

$$S_{est} = \frac{\pi r^2}{4} [1 - 4 \cdot (3 - 2\sqrt{2})]$$

$$S_{est} = \frac{\pi r^2}{4} (8\sqrt{2} - 11)$$